Séquence 1 : Second degré.

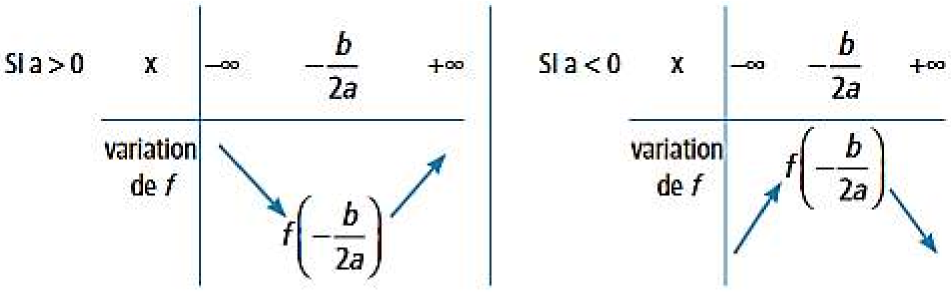
1. **Rappel de cours :**

① Fonction polynôme de degré 2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ est une fonction **polynôme de degré 2** ou **fonction trinôme.**

Sa courbe représentative est une **parabole.**

Son tableau de variation est le suivant :



② Discriminant

ax^2+bx+c avec $a \neq 0$ est appelé trinôme

$\Delta = b^2-4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme

③ Solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et signe du trinôme

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Solutions	2 solutions : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	1 solution double : $\alpha=-\frac{b}{2a}$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$
Forme factorisée	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-\alpha)^2$	Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
Signe	Celui de a à l'extérieur des racines Celui de $-a$ entre les racines	Celui de a	Celui de a

2. **Formes du trinôme du second degré.**

EXERCICE 1 :

Soit $f(x)=3x^2-30x+83$ et $g(x)=-x^2-8x-15$

a) Déterminer les coefficients a, b et c du trinôme ax^2+bx+c as fonctions f et g.

b) Vérifier que $f(x)=3(x-5)^2+8$ et $g(x)=-(x+4)^2+1$.

c) Donner les coordonnées du sommet de la parabole associée à f pu

EXERCICE 2 :

Soit $f(x)=3(x+7)^2-2$ et $g(x)=-2(x+4)^2+5$

a) Déterminer la forme développée de f puis de g.

b) Donner le tableau de variations de f puis de g.

c) Donner les coordonnées du sommet de la parabole associée à f

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=(x+3)^2-25$ (*Forme A*).

❶ Vérifier que f peut aussi s'écrire sous la forme

a) $f(x)=x^2+6x-16$ (*Forme B*).

b) $f(x)=(x-2)(x+8)$ (*Forme C*).

❷ a) Mettre une croix dans la case correspondant à la forme la plus adaptée pour calculer $f(0)$; $f(-3)$ et $f(2)$.

	Forme A	Forme B	Forme C
$f(0)$			
$f(-3)$			
$f(2)$			

b) Effectuer les calculs.

❸ a) Mettre une croix dans la case correspondant à la forme la plus adaptée pour résoudre $f(x)=0$; $f(x)=11$ et $f(x)=-16$

	Forme A	Forme B	Forme C
$f(x)=0$			
$f(x)=11$			
$f(x)=-16$			

b) Résoudre ces équations.

3. Résolution d'équations.

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ et, si possible, factoriser $f(x)$

a) $f(x)=-0{,}5x^2+2{,}5x+3$

b) $f(x)=-2x^2+12x-18$

c) $f(x)=-0{,}5x^2+3x-9{,}5$

d) $f(x)=5x^2+12x+3$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $3x^2+5x=2x^2-2x+4$

b) $(2x+4)^2=3x+5$

Exercice 3 :

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2+3x+2$ et $g(x)=5x^2+2x+1$ et représentées graphiquement par les paraboles P_f et P_g respectivement.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P_f et P_g.

EXERCICE 4 :

Offre et demande

Les fonctions d'offre et de demande de la pomme de terre sur les marchés, exprimées en € par tonne, sont données par :

$$O(q)=2q^2+1{,}5q+17 \text{ et } D(q)=q^2-20q+110, \text{ pour } q<10.$$

où q désigne la masse de pomme de terre exprimée en tonne.

1. a) Pour quelle masse l'offre est-elle de 43 € ?

   b) Pour quelle masse la demande est-elle de 26 € ?

2. a) Dresser le tableau de variation des fonctions offre et demande sur l'intervalle [1 ; 10].

   b) Représenter ces deux fonctions dans un même repère.

   Unités : en abscisse, 2 cm pour une unité ; en ordonnée, 1 cm pour 10 unités.

3. a) Résoudre graphiquement l'équation $O(q)=D(q)$.

   La solution de cette équation est appelée **quantité d'équilibre du marché.**

   b) Par un calcul, déterminer la valeur exacte puis la valeur approchée à 0,01 tonne près de la quantité d'équilibre du marché. Quel est alors le prix d'équilibre du marché, arrondi au centime près ?

4. Signe d'un trinôme.

EXERCICE 1 :

Étudier le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

a) $f(x)=2x^2+3x+1$

b) $f(x)=x^2+3x+4$

c) $f(x)=-2x^2+12x-18$

EXERCICE 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x^2-3x+4\geq 0$

b) $-3x^2+30x-75<0$

c) $7x^2+2x-4<0$

EXERCICE 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x^2-3x+4\geq 5x+6$

b) $-x^2+8x-7>3x^2+1$

Séquence 2 : Pourcentages.

1. **Rappels de cours.**

❶ Pourcentage d'évolution

Lorsqu'une quantité passe d'une valeur V_1 à une valeur V_2, le coefficient multiplicateur associé est :

$$CM = \frac{V_2}{V_1}.$$

Le **pourcentage d'évolution** relative t % entre V_1 et V_2 est défini par :

$$\frac{t}{100} = \frac{V_2 - V_1}{V_1}, \text{ soit } \frac{t}{100} = CM - 1.$$

Si $t > 0$, l'évolution est une hausse.

Si $t < 0$, l'évolution est une baisse.

❷ Coefficient multiplicateur et évolution

Augmenter une quantité de t% revient à la multiplier par $CM = 1 + \frac{t}{100}$.

Diminuer une quantité de t% revient à la multiplier par $CM = 1 - \frac{t}{100}$.

❸ Indices et évolution

On utilise souvent les indices pour prendre connaissance de l'évolution d'une valeur à partir d'une date fixée.

$$\text{Indice année } n = \frac{\text{valeur de l'année } n}{\text{valeur de l'année de base}} \times 100.$$

En **soustrayant 100** à un indice, on lit directement le **pourcentage d'évolution** de l'année de référence à l'année n.

❹ Évolutions successives

Lors de deux évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient.

Si $V_0 \xrightarrow{CM_1} V_1 \xrightarrow{CM_2} V_2$ alors $CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$

Généralisation

Lors d'évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient.

⑤ Évolution réciproque

Le taux de pourcentage t' % compensant une évolution (hausse ou baisse) de t % est appelé **taux d'évolution réciproque.**

Pour le déterminer, on traduit que le produit des coefficients multiplicateurs correspondants à ces évolutions doit être égal à 1, soit :

$$(1+\frac{t}{100})(1+\frac{t'}{100})=1$$

Les **coefficients multiplicateurs** de deux évolutions réciproques sont donc **inverses** l'un de l'autre.

2. Evolutions et pourcentages.

EXERCICE 1 :

Le tableau suivant donne les résultats au bac dans un lycée rennais

Année	2009	2010	2011
Nombre de candidats	246	258	271
Nombre de reçus	221	224	249

1. Calculer le taux d'accroissement du nombre de candidats entre 2009 et 2011
2. Calculer le taux de réussite au bac chaque année pour ce lycée.
3. Calculer le taux d'évolution du pourcentage de réussite au bac sur la période 2009-2010 puis sur la période 2010-2011.

EXERCICE 2 :

Recopier et compléter le tableau suivant :

Ancien prix en €	148	345	465	
Nouveau prix en €		369,15		575
Coefficient multiplicateur			1,2	
Evolution en %	+15%			–8%

EXERCICE 3 :

Le taux de TVA sur les articles suivants est 19,6%.

1. Un article coûte 280 € HT ; calculer son prix TTC.
2. Un article coûte 203,32 € TTC ; calculer son prix HT et le montant de la TVA.
3. Le montant de la TVA sur un article est 41,16 € ; calculer son prix TTC.

3. Evolutions successives et réciproques.

EXERCICE 1 :

Le prix du m^3 de gaz a subi en France, en 2005, une augmentation de 7,5% au mois de Mai et de 2,5% au mois de Décembre.

De quel pourcentage le prix du gaz a-t-il augmenté en France en 2005 ?

EXERCICE 2 :

Le nombre d'adhérents d'une médiathèque a diminué de 7% entre le 1er Janvier 2009 et le 31 Décembre 2009 et a augmenté de 8% entre le 1er Janvier 2010 et le 31 Décembre 2010.

Le nombre d'adhérents a-t-il augmenté ou diminué entre le entre le 1er Janvier 2009 et le 31 Décembre 2010 ?

EXERCICE 3 : COMPLETER LE TABLEAU SUIVANT.

Première étape	Deuxième étape	Résultante
augmentation de 20%	augmentation de 10%	augmentation de 32%
augmentation de 10%	diminution de 10%	
augmentation de 10%	augmentation de 20%	
augmentation de 10%	augmentation de 10%	
diminution de 20%	diminution de 20%	
augmentation de 10%	diminution de 5%	
augmentation de 25%	diminution de 20%	
diminution de 3,2%	diminution de 6,8%	
augmentation de 12,5%		augmentation de 38,75%
diminution de 25%		diminution de 36,25%
	diminution de 36%	résultat constant
augmentation de 20%		résultat constant

EXERCICE 4 :

Un propriétaire augmente un loyer de 8% chaque année.

1. Calculer le loyer au bout de 5 augmentations successives, connaissant le loyer initial de 165€ (arrondir à 1€ près).
2. En combien d'années le loyer aura-t-il plus que doublé ?

EXERCICE 5 :

1. Le prix d'un article augmente de 20%.
   Calculer le pourcentage de variation qu'il faut appliquer pour le ramener à son prix normal.

2. Même question pour
   a) une augmentation de 100%
   b) une augmentation de 200%
   c) une diminution de 30%

SEQUENCE 3 : FONCTIONS DE REFERENCE.

1. **Synthèse du cours.**

❶ Fonction « racine carrée »

Propriétés

La fonction racine carrée est définie et croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Un nombre positif a étant donné, dire que r est la racine carrée de a signifie que r est le nombre positif dont le carré est égal à a. En résumé,

$$r=\sqrt{a} \quad \text{est équivalent à} \quad \begin{cases} r^2=a \\ r\geq 0 \end{cases}$$

❷ Fonction « cube »

Propriété

La fonction « cube » est croissante sur $\mathbb{R}$

2. **Exercices.**

EXERCICE 1 :

VRAI / FAUX

Répondre en justifiant.

a) $\sqrt{0{,}9}=0{,}3$ ☐ Vrai ☐ Faux

b) $\sqrt{22{,}09}=4{,}7$ ☐ Vrai ☐ Faux

c) Un cube est toujours positif ☐ Vrai ☐ Faux

d) L'image de tout nombre réel a par la fonction « carré » puis par la fonction « racine carrée » redonne a. ☐ Vrai ☐ Faux

e) Le résultat sera le même, quelque soit l'ordre dans lequel on applique les fonctions « carré » et « racine carrée », à partir d'un nombre réel a. ☐ Vrai ☐ Faux

f) Pour tout nombre réel x, on a $\sqrt{x^2}=x$. ☐ Vrai ☐ Faux

g) Pour tout $x\in[0;+\infty[$, on a $\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{x^2}$. ☐ Vrai ☐ Faux

h) Une fonction constante est une fonction qui n'est ni croissante ni décroissante ☐ Vrai ☐ Faux

i) Une fonction qui n'est ni croissante ni décroissante est une fonction constante ☐ Vrai ☐ Faux

EXERCICE 2 :

Un ballon de basket a un rayon compris entre 23,8cm et 24,5cm. Donner un encadrement au cm^3 près de son volume en cm^3.

EXERCICE 3 :

Un grand bol ayant la forme d'une demi-sphère de diamètre 15 cm est rempli à raz bord de lait. On veut transvaser le lait dans des petits bols (de forme demi-sphérique, eux aussi) de diamètre 10 cm. Combien de petits bols suffit-il de prendre ?

EXERCICE 4 :

1. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^3+2x^2-5x-6\geq 0$
2. a) Développer $(x+1)(x-2)(x+3)$

   b) Retrouver le résultat de la question 1 par le calcul.

Séquence 4 : Généralités sur les suites.

1. **Rappels de cours.**

1 Définition

Définition

Une **suite** de nombres réels est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notation et vocabulaire

– u ou (u_n) désigne la suite (avec n un entier naturel).

– Le nombre u_n (on lit « u ène » ou « u indice ène ») est le terme de rang n de la suite u.

– Le premier terme de la suite est appelé **terme initial**.

2 Deux modes de construction d'une suite

Une suite peut être définie de façon **explicite** ou par **récurrence**.

3 Représentation graphique

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la **représentation graphique** d'une suite u est l'ensemble des **points de coordonnées** $(n;u_n)$.

4 Sens de variation

Soit une suite u définie sur $\mathbb{N}$.

u est une **suite croissante** (resp. strictement croissante) si, pour tout entier n, $u_n\leq u_{n+1}$ (resp. $u_n<u_{n+1}$).

u est une **suite décroissante** (resp. strictement décroissante) si, pour tout entier n, $u_n\geq u_{n+1}$ (resp. $u_n>u_{n+1}$).

u est une **suite constante** si, pour tout entier n, $u_n=u_{n+1}$.

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :

- étudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$ de deux termes consécutifs.
- lorsqu'une suite u est définie explicitement à l'aide d'une fonction f par $u_n=f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2. **Exercices.**

EXERCICE 1 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (n+3)\times 2^n$

❶ La suite u est–elle définie explicitement ou par récurrence ?

❷ Calculer u_0 , u_1 , u_5 et u_{12} .

EXERCICE 2 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 8 \end{cases}$

❶ La suite u est-elle définie explicitement ou par récurrence ?

❷ Ecrire une phrase pour traduire l'égalité $u_{n+1} = 2u_n - 8$

❸ Calculer u_1 , u_2. u_3 et u_6 .

EXERCICE 3 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

❶ Calculer u_0 . u_1 . u_2 . u_3 et u_4 .

❷ Représenter les points associés au cinq premiers termes de la suite (u_n) dans un repère.

❸ Conjecturer le sens de variation de cette suite. Prouver cette conjecture.

EXERCICE 4 :

A partir des exemples ci-dessous, définir une suite de la façon suivante :

- indiquer ce que représente le terme général
- indiquer le terme initial
- donner la formule (explicite ou par récurrence) qui définit la suite.

❶ Pierre place 500 € sur un compte rémunéré au taux annuel de 3 %.

❷ Chaque année, la largeur d'une dune diminue de 5 m sous l'effet de l'érosion. Sa largeur en 2010 est de 50 m.

❸ Le prix d'une course de taxi est défini de la façon suivante : prise en charge 2€ ; prix du kilomètre 1,48 €

❹ Un laboratoire met en culture 100 bactéries d'une souche donnée. Chaque heure le nombre de bactéries double.

Séquence 5 : Fonctions dérivées.

1. **Rappels du cours.**

❶ Dérivées des fonctions usuelles

	Fonction f	Dérivée f'	Intervalle I
(1)	$f(x) = c$ (c est une constante)	$f'(x) = 0$	$I = \mathbb{R}$
(2)	$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	
(3)	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	
(4)	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	
(5)	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	
(6)	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0\,;+\infty[$
(7)	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0\,;+\infty[$

❷ Dérivation et opérations sur les fonctions

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I. Leurs dérivées sont u' et v'.

Fonction	Dérivée
$u+v$	$(u+v)'=u'+v'$
ku où $k\in\mathbb{R}$	$(ku)'=ku'$
uv	$(uv)'=u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ (u est une fonction ne s'annulant pas sur I)	$\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ (v est une fonction ne s'annulant pas sur I)	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

❸ Applications de la dérivation

Ici, on considère une fonction f dérivable sur un intervalle I.

On peut regrouper les énoncés des théorèmes 1 et 2 de la manière suivante :

▸ Théorèmes 1 et 2

➤ « f est constante sur I » équivaut à « pour tout réel $x\in I$, $f'(x)=0$ ».

➤ « f est croissante sur I » équivaut à « pour tout réel $x\in I$, $f'(x)\geq 0$ ».

➤ « f est décroissante sur I » équivaut à « pour tout réel $x\in I$, $f'(x)\leq 0$ ».

▸ Théorème 3 On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f a un extremum en un point d'abscisse a alors $f'(a)=0$.

2. Calculs de dérivées.

Exercice 1 :

Calculer $f'(x)$ lorsque la fonction f est définie par :

❶ $f(x)=x^2-7x+4$ ❷ $f(x)=\frac{-7x+1}{11}$ ❸ $f(x)=-0{,}1x^{10}-\frac{7}{5}x^5+\sqrt{3}$

❹ $f(x)=-\sqrt{2}x^2-7x+1$ ❺ $f(x)=9x^4-\frac{3}{2}$. ❻ $f(x)=-x^5+\frac{5x}{7}$

Exercice 3 :

Calculer la dérivée de la fonction f d'abord en développant $f(x)$ puis en utilisant la formule donnant la dérivée d'un produit, dans les cas suivants.

❶ $f(x)=(x-3)(4-x)$

❷ $f(x)=(3x-2)(3x+2)$

❸ $f(x)=\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$

Exercice 2 :

Calculer $f'(x)$ lorsque la fonction f est définie par :

❶ $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$ ❷ $f(x)=\frac{5}{x}-2x^3$ ❸ $f(x)=\frac{-4x^2}{\sqrt{x}}+(2\sqrt{x}+1)^2$

Exercice 4 :

Calculer $f'(x)$ lorsque la fonction f est définie par :

❶ $f(x)=\frac{5x+1}{3x-1}$ ❷ $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x}$ ❸ $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$

3. Applications de la dérivation.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;3]$ par $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$.

❶ Calculer la dérivée f' de f.

❷ Étudier le signe de $f'(x)$.

❸ Dresser le tableau de variation de f sur $[-4\,;3]$.

❹ Quels sont les extrema de f et en quels points sont-ils atteints

a. sur $[-3\,;2]$?

b. sur $[-4\,;3]$?

❺ Combien de solutions dans l'intervalle $[-3\,;2]$ l'équation $f(x)=0$ possède-t-elle ?

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;0[\cup]0\,;4]$ par $f(x)=2x+1-\frac{4}{x}$.

❶ Calculer la dérivée f' de f.

❷ Étudier le signe de $f'(x)$.

❸ Dresser le tableau de variation de f sur $[-4\,;4]$.

Séquence 7 : Probabilités.

1. **Rappels du cours.**

① Loi de probabilité, espérance d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_r$.

➢ Donner **la loi de probabilité** d'une **variable aléatoire** X, c'est donner le tableau :

x_1	x_2	…	x_r
$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	…	$P(X=x_r)$

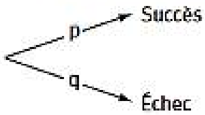
➢ **L'espérance de la variable aléatoire** X est le nombre, noté $\mathbf{E(X)}$, défini par :

$$\boxed{E(X)=x_1 P(X=x_1)+x_2 P(X=x_2)+\ldots+x_r P(X=x_r).}$$

② Epreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

➢ Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve aléatoire comportant deux issues, l'une appelée « succès », l'autre appelée « échec ».

On peut représenter une épreuve de Bernoulli par un arbre pondéré :



On considère une épreuve de Bernoulli.

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de réussite et la valeur 0 en cas d'échec.

➢ La variable aléatoire X est appelée **variable de Bernoulli** et la loi de probabilité de X est appelée **loi de Bernoulli.** Elle est donnée par :

k	0	1
$P(X=k)$	$q=1-p$	p

➢ La variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p a pour **espérance** p.

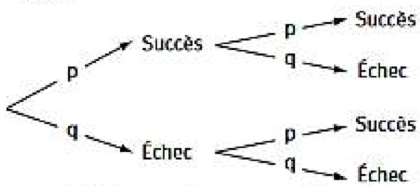
③ Schéma de Bernoulli, loi binomiale

➢ La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est une expérience aléatoire qu'on appelle **schéma de Bernoulli**.

Soit X la variable aléatoire définie par le **nombre de succès** dans un schéma de Bernoulli dans lequel on répète n fois une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès est égale à p.

➢ La loi de probabilité de X s'appelle **la loi binomiale de paramètres n et p.** On la note $\mathcal{B}(n, p)$.

➢ Une façon de représenter un schéma de Bernoulli est d'utiliser un arbre pondéré :



Exemple d'arbre représentant un schéma de Bernoulli pour $n=2$ et $p+q=1$.

➢ Le nombre de chemins de l'**arbre** réalisant k succès pour n répétitions se note $\binom{n}{k}$ et s'appelle un **coefficient binomial**.

➢ **Expression de la loi binomiale**

Lorsque la loi d'une variable aléatoire X est la loi binomiale de paramètres n et p, la variable aléatoire X prend les $n+1$ valeurs 0, 1, 2, 3, …, $n-1$, n avec les probabilités :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n.$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, son espérance est $\mathbf{E(X)=np}$.

2. Variable aléatoire.

EXERCICE 1 :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. La loi de probabilité de X est précisée dans le tableau suivant, dans lequel a est un nombre.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$7a$

1. Calculer a.
2. Le dé est-il truqué.

EXERCICE 2 :

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public : dans une urne sont placées

- 2 boules rouges R1 et R2
- 2 boules vertes V1 et V2
- une boule blanche B

Ces boules sont indiscernables au toucher.

Le joueur prend une première boule au hasard, puis sans la remettre dans l'urne, il tire une seconde boule.

A la fin de la partie, si la boule blanche a été tirée, le joueur gagne 10 € ; il perd dans les autres cas.

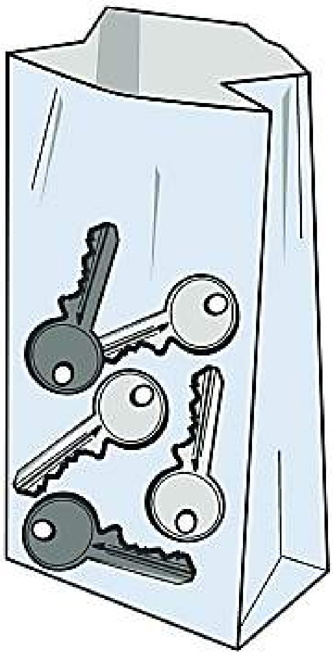
Pour faire une partie, le joueur doit payer 5 €.

On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie, c'est-à-dire la différence entre le gain éventuel et le prix du jeu.

1. Déterminer avec un arbre tous les cas possibles.
2. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3. Répétitions d'expériences aléatoires et indépendantes.

EXERCICE 1 :



Dans un sac, il y a 5 clefs identiques au toucher ; 3 rouges et 2 noires.

1. On pioche une clef au hasard dans le sac.
   a) Quelle est la probabilité de l'événement N, « obtenir un clef noire » ?
   b) Quelle est la probabilité de l'événement R, « obtenir un clef rouge » ?

Sur chaque clef, on a collé une étiquette sur laquelle on a écrit un numéro : 1 et 2 pour les clefs noires, 3, 4 et 5 pour les clefs rouges.

2. On considère une nouvelle expérience aléatoire : on pioche une clef au hasard dans le sac, on note sa couleur et on la remet dans le sac puis on pioche à nouveau une clef.

a) En utilisant la distinction permises par les numéros, énumérez les tirages correspondant à l'événement NN « obtenir deux clefs noires ».
b) Calculer la probabilité de l'événement NN ?

3 De même, énumérez les tirages formant l'événement NR « obtenir une clef noire la première fois et une clef rouge la seconde » puis calculer la probabilité de cet événement.

4 Répondre aux questions analogues pour les événements RN et RR.

5 Quel lien pouvez-vous faire entre les probabilités de N et de R et la probabilité de NR ? Que pouvez-vous dire de la probabilité de l'événement RN ? De celle de l'événement RR ?

EXERCICE 2 :

Un choix de clefs : un autre point de vue

Dans la situation de l'activité 5 on pioche (avec remise, pour que les conditions de la pioche soient identiques) deux fois une clef dans un sac contenant des clefs de deux couleurs et on s'intéresse au nombre de clefs noires piochées. Il est donc naturel d'introduire la variable aléatoire X égale au nombre de clefs noires piochées.

Etudions ce point de vue.

1 Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X lorsqu'on pioche deux fois dans le sac ?

2 Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

4. Loi Binomiale.

EXERCICE 1 :

On lance 10 fois une pièce de monnaie équilibrée.

Quelle est la probabilité que la pièce tombe exactement 5 fois du côté pile ?

On donne la valeur du coefficient binomial $\binom{10}{5} = 252$.

EXERCICE 2 :

Le monopole du marché du cacao est détenu par deux marques A et B. On a observé que 20% de la clientèle choisit la marque A et 80%, la marque B.
On effectue un sondage sur 100 personnes au hasard.

On note X le nombre de personnes ayant achetées la marque A.

1 Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2 Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 20 et 25 personnes à avoir choisi la marque A ?

EXERCICE 3 :

La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.
Une épreuve du championnat consiste en 7 tirs.
Tous les facteurs (anxiété, fatigue du tireur, conditions météorologiques, …) sont les mêmes à chaque tir.
En moyenne à une épreuve, combien de fois ce tireur aura-t-il atteint la cible ?

EXERCICE 4 :

Un jeu consiste à lancer 18 fois une pièce de monnaie.
Si vous obtenez 18 *Faces* vous gagnez 900 millions d'euros ; sinon, vous perdez 1000 €.

1. Calculer l'espérance du gain à ce jeu. Jouerez-vous ?
2. On divise les enjeux par 10 000 : on gagne 90 000 € en obtenant 18 *Faces* ; sinon, on perd 10 centimes.

Calculer l'espérance du gain à ce nouveau jeu. Jouerez-vous ?

Séquence 8 : Suites arithmétiques et géométriques.

1. **Rappels du cours.**

Définition

Une **suite** est **arithmétique** si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre *r*, appelé **raison de la suite** :

pour tout entier naturel *n*, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ où *r* est la raison de la suite.

La **variation absolue** entre deux termes consécutifs d'une suite arithmétique est constante égale à *r* : $u_{n+1} - u_n = r$

Propriété 1 (Formule explicite)

Soit *u* une suite arithmétique de raison *r*.

Pour tous entiers naturels *n* et *p*, $\boxed{u_n = u_p + (n-p) \times r}$.

En particulier, $u_n = u_0 + n \times r$ et $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

Propriété 2 (Représentation graphique)

Soit *u* une suite arithmétique de raison *r*.

Dans un repère du plan, les points de coordonnées ($n;u_n$) associés à cette suite sont alignés.

Pour une suite arithmétique, on parle alors d'évolution linéaire.

Propriété 3 (Sens de variation)

Soit une suite arithmétique de raison *r*.

Si $r > 0$, la suite arithmétique est strictement croissante.

Si $r < 0$, la suite arithmétique est strictement décroissante.

Si $r = 0$, la suite arithmétique est constante.

❷ Suite géométrique

Définition

Une **suite** est **géométrique** si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q, appelé **raison de la suite** :

pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$ où q est la raison de la suite.

La **variation relative** entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique est constante égale à q : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

Propriété 1 (Formule explicite)

Soit u une suite géométrique de raison q.

Pour tous entiers naturels n et p, $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

En particulier, $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Propriété 2 (Sens de variation)

Soit q un réel strictement positif. Soit la suite géométrique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.

Si $0 < q < 1$, la suite géométrique $u_n = q^n$ est strictement décroissante.

Si $q = 1$, la suite géométrique $u_n = q^n$ est constante égale à 1.

Si $1 < q$, la suite géométrique $u_n = q^n$ est strictement croissante.

2. **Suites arithmétiques.**

EXERCICE 1 :

Parmi les suites suivantes, reconnaître celles qui sont des suites arithmétiques.
Pour les suites arithmétiques, préciser la raison.

❶ $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 5$.

❷ Pour tout entier naturel n, $u_n = 3n + 10$.

❸ Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n} + 8$.

❹ $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

EXERCICE 2 :

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison -7.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{100}.

EXERCICE 3 :

u est une suite arithmétique de raison r. Dans chacun des cas suivants, calculer u_{20} :

1. $u_0 = -12$ et $r = 1,5$.
2. $u_7 = 3,5$ et $r = 2$.

EXERCICE 4 :

Dans chacun des cas suivants, u désigne une suite arithmétique. Déterminer le sens de variation de ces suites.

1. $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 8$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - 6n$.
3. $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

EXERCICE 5 :

Intérêts simples

Un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 4 % à intérêts simples. Cela signifie que, chaque année, les intérêts sont fixes égaux à 4 % du capital initial.

On note C_0 le capital initial et C_n celui disponible au bout de n années.

1. Calculer C_1 et C_2.
2. a) Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
   b) Exprimer C_n en fonction de n.
3. A partir de quelle année le capital disponible aura-t-il doublé ?

3. Suites géométriques.

EXERCICE 1 :

Parmi les suites suivantes, reconnaître celles qui sont des suites géométriques. Pour les suites géométriques, préciser la raison.

1. $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 3n$.
3. Pour tout entier naturel n, $u_n = 0,1 \times 2^n$.
4. $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^n$.

EXERCICE 2 :

Soit u une suite géométrique de premier terme $u_7 = 2$ et de raison 3.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{17}.

EXERCICE 3 :

u est une suite géométrique de raison q. Dans chacun des cas suivants, calculer u_{20}. (Arrondir à 10^{-2} près si nécessaire).

1. $u_0 = -12$ et $q = 1,5$.
2. $u_7 = 3,5$ et $q = 2$.
3. $u_1 = 1510000$ et $q = 0,4$.
4. $u_{36} = 16384$ et $q = 2$.

Exercice 4 :

Dans chacun des cas suivants, u désigne une suite géométrique. Déterminer le sens de variation de ces suites.

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 0{,}32^n$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 5^n$.
3. Pour tout entier naturel n, $u_n = 1^n$.
4. Pour tout entier naturel n, $u_n = -2 \times 6^n$.
5. Pour tout entier naturel n, $u_n = 7 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$.
6. Pour tout entier naturel n, $u_n = 21 \times 0{,}6^n$.
7. Pour tout entier naturel n, $u_n = -0{,}1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 5 :

Dans chacun des cas suivant, u désigne une suite géométrique. Déterminer le sens de variation de ces suites.

1. $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5 \times u_n$.
2. $u_0 = -3{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5 \times u_n$.
3. $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.
4. $u_0 = 6{,}5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n$.
5. $u_0 = 0{,}4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}1 \times u_n$.

Exercice 6 :

Augmentation

Un patron propose à ses employés deux modes d'augmentation de leur salaire mensuel.

1. Option A : une augmentation fixe du salaire mensuel de 50 € au premier janvier de chaque année.

Marie est embauchée dans l'entreprise avec un salaire de 1 500 € par mois. Elle choisit d'être augmentée suivant l'option A. On note M_n son salaire après n années passées dans l'entreprise. On a $M_0 = 1500$.

a) Calculer M_1 et M_2 .

b) Exprimer M_{n+1} en fonction de M_n . En déduire la nature de la suite (M_n).

c) Exprimer M_n en fonction de n.

d) Calculer M_{20} .

e) A partir de combien d'années son salaire mensuel sera-t-il d'au moins 1 800 € ?

2. Option B : une augmentation de 3 % du salaire mensuel de l'année précédente au premier janvier de chaque année.

Jean est embauché la même année que Marie avec un salaire de 1 500 € par mois. Il choisit d'être augmenté suivant l'option B. On note J_n son salaire après n années passées dans l'entreprise. On a $J_0 = 1500$.

a) Calculer J_1 et J_2 .

b) Exprimer J_{n+1} en fonction de J_n . En déduire la nature de la suite (J_n).

c) Exprimer J_n en fonction de n.

d) Calculer J_{20} . (Arrondir au centime près).

e) A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années son salaire mensuel sera d'au moins 1 800 € ?

3. A partir de combien d'années passées dans l'entreprise, le salaire mensuel de Jean sera-t-il supérieur à celui de Marie ?